物性テンソルの多極子表現

明大理工 楠瀬博明

1. 基本事項

1.1. 基本要素

極性および軸性のテンソルを分解するために基本となる要素は Kronecker の δ_{12} と Levi-Civita の ϵ^{123} である。δ_{12} は対称極性 2 階テンソル (P_2)、ϵ^{123} は完全反対称軸性 3 階テンソル (A_3) である。また、テンソル積の組み合わせにより、極性 (P) × 極性 (P) = 極性 (P), 軸性 (A) × 軸性 (A) = 極性 (P), 極性 (P) × 軸性 (A) = 軸性 (A) のように性質が変換される。

1.2. 完全対称・反対称テンソルの縮約公式

δ_{12} と ϵ^{123} を組み合わた縮約公式は以下のようになる。対称なラベルを下添字、反対称なラベルを上添字とした。

$$\delta_{12}=\delta_{21} \tag{1}$$

$$\epsilon^{123}=-\epsilon^{213} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{12;34}=\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23}=\delta_{21;34}=\delta_{12;43}=\delta_{34;12}\\
&\epsilon^{12;34}=\epsilon^{125}\epsilon^{345}=\delta_{13}\delta_{24}-\delta_{14}\delta_{23}=-\epsilon^{21;34}=-\epsilon^{12;43}=\epsilon^{34;12}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^{5}_{12;34}=\delta_{13}\epsilon^{245}+\delta_{23}\epsilon^{145}+\delta_{14}\epsilon^{235}+\delta_{24}\epsilon^{135}=\delta^{5}_{21;34}=\delta^{5}_{12;43}=-\delta^{5}_{34;12}\\
&\gamma^{34}_{12;5}=\delta_{15}\epsilon^{234}+\delta_{25}\epsilon^{134}=\gamma^{34}_{21;5}=-\gamma^{43}_{12;5}\\
&\epsilon^{12;34}_{5}=\frac{1}{2}[\delta_{15}\epsilon^{234}-\delta_{25}\epsilon^{134}-\delta_{35}\epsilon^{124}+\delta_{45}\epsilon^{123}]=-\epsilon^{21;34}_{5}=-\epsilon^{12;43}_{5}=-\epsilon^{34;12}_{5}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{12;34;56}=\frac{1}{2}[\delta_{12}\delta_{34;56}+\delta_{34}\delta_{12;56}]=\delta_{21;34;56}=\delta_{12;43;56}=\delta_{12;34;65}=\delta_{34;12;56}\\
&\delta'_{12;34;56}=\frac{1}{2}[\delta_{13}\delta_{24;56}+\delta_{23}\delta_{14;56}+\delta_{14}\delta_{23;56}+\delta_{24}\delta_{13;56}]=\delta'_{21;34;56}=\delta'_{12;43;56}=\delta'_{12;34;65}=\delta'_{34;12;56}\\
&\delta''_{12;34;56}=\frac{1}{2}[\delta_{12}\delta_{34;56}-\delta_{34}\delta_{12;56}]=\delta''_{21;34;56}=\delta''_{12;43;56}=\delta''_{12;34;65}=-\delta''_{34;12;56}\\
&\gamma^{34}_{12;56}=\frac{1}{2}[\delta_{35}\delta_{12;46}+\delta_{36}\delta_{12;45}-\delta_{45}\delta_{12;36}-\delta_{46}\delta_{12;35}]=\gamma^{34}_{21;56}=\gamma^{34}_{12;65}=-\gamma^{43}_{12;56}\\
&\epsilon^{12;34}_{56}=\frac{1}{2}[\epsilon^{125}\epsilon^{346}+\epsilon^{126}\epsilon^{345}]=-\epsilon^{21;34}_{56}=-\epsilon^{12;43}_{56}=\epsilon^{34;12}_{56}=\epsilon^{12;34}_{65}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{7}_{12;34;56}&=\frac{1}{2}[\epsilon^{137}\delta_{24;56}+\epsilon^{237}\delta_{14;56}+\epsilon^{247}\delta_{13;56}+\epsilon^{147}\delta_{23;56}]\\
&=\delta^{7}_{21;34;56}=\delta^{7}_{12;43;56}=-\delta^{7}_{34;12;56}=\delta^{7}_{12;34;65}
\end{aligned} \tag{6}$$

2. テンソル分解

極性 (P) テンソルの分解のみを示す。軸性 (A) テンソルの分解は、極性 (P) テンソルの分解式において、極性 (P) と軸性 (A) の役割を入れ替えればよい。

電気的な i テンソルでは、P テンソルの分解式に現れる Q, G を G, Q に置き換えれば A テンソルの分解式が得られる。一方、磁気的な c テンソルでは、P テンソルの分解式に現れる T, M を M, T に置き換えれば A テンソルの分解式が得られる。

ランク 4 までの分解式は、以下の (7), (8), (9), (11), (13) である。物性テンソルは、$(P/A,\,\mathrm{i/c})$ とランクの組み合わせ、つまり $X = Q/G/T/M$ とランクによって指定できる。また、対称テンソル、非線形テンソルなどの情報はテンソルのタイプ (s/a/sss など) と添字の並び (例えば、入力 234, 出力 1 なら $P^t_{234;1}$ など) を指定すればよい。代表的な物性テンソルと分解式との関係を表 1 にまとめておく。

表 1　代表的な物性テンソル。(調べて埋める)

名称	出力	入力	ランク	タイプ	添字の順序
伝導率 σ_{12}	j_1	E_2	2	$(Q$,-)	12

2.1. 0 階

極性単極子 Q (1 成分) を用いて

$$P = Q^{(1)} \tag{7}$$

2.2. 1 階

極性双極子 Q_1 (3 成分) を用いて

$$P_1 = Q_1^{(1)} \tag{8}$$

2.3. 2 階

2 階テンソル P_{12} は $3^2 = 9$ 成分ある。このうち、$(1, 2)$ の入れ替えに対して対称な成分 P^s_{12} は 6、反対称な成分 P^a_{12} は 3 である。したがって、極性単極子 Q (1 成分), 軸性双極子 G_1 (3 成分) および極性四極子 Q_{12} (5 成分) を用いて

$$\begin{aligned} P_{12} &= P^s_{12} + P^a_{12} \\ P^s_{12} &= \delta_{12} Q^{(1)} + Q^{(1)}_{12} = P^s_{21} \\ P^a_{12} &= \epsilon^{123} G^{(1)}_3 = -P^a_{21} \end{aligned} \tag{9}$$

のように分解することができる。ここで、Q_{12} は $(1,2)$ の入れ替えに対して対称 (6 成分) であり、対称和 (トレース) は $Q_{11}=0$。この拘束条件 (1 個) により $6-1=5$ 成分となる。$(1,2)$ の入れ替えについて対称なら $G_1^{(1)}=0$、反対称なら $Q^{(1)}=Q_{12}^{(1)}=0$ である。P_{12} を表すための独立なパラメータ数は $Q^{(1)}$, $G_3^{(1)}$, $Q_{12}^{(1)}$ の $1+3+5=9$ 個で、全成分数と一致している。拘束条件を具体的に書くと $Q_{xx}^{(1)}+Q_{yy}^{(1)}+Q_{zz}^{(1)}=0$。

行列形式 $(x,y,z)\times(x,y,z)$ で書くと、対称成分と反対称成分は

$$\hat{P}^s=\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ * & S_{yy} & S_{yz} \\ * & * & S_{zz} \end{pmatrix},\quad \hat{P}^a=\begin{pmatrix} 0 & A_{xy} & -A_{zx} \\ ** & 0 & A_{yz} \\ ** & ** & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ここで $*$ は上三角の対応する要素と同じ符号、$**$ は反対符号を表す。成分の内容は付録 A にまとめた。

2.4. 3 階

3 階テンソル $P_{12;3}$ は $3^3=27$ 成分ある。このうち、$(1,2)$ の入れ替えに対して対称な成分 $P_{12;3}^s$ は $6\times3=18$、反対称な成分 $P_{12;3}^a$ は $3\times3=9$ である。$(1,2)$ の入れ替えに対して対称な δ_{12}, $\delta_{12:34}$, $\gamma_{12;5}^{34}$ と反対称な ϵ^{123}, $\epsilon^{12:34}$ および軸性単極子 G (1 成分), 極性双極子 Q_1 (3 成分), 軸性四極子 G_{12} (5 成分), 極性八極子 Q_{123} (7 成分) を用いて

$$\begin{aligned} P_{123}&=P_{12;3}^s+P_{12;3}^a \\ P_{12;3}^s&=\delta_{12}Q_3^{(1)}+\delta_{12:34}Q_4^{(2)}+\gamma_{12;5}^{34}G_{45}^{(1)}+Q_{123}^{(1)}=P_{21;3}^s \\ P_{12;3}^a&=\epsilon^{123}G^{(1)}+\epsilon^{12:34}Q_4^{(3)}+\epsilon^{124}G_{34}^{(2)}=-P_{21;3}^a \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、Q_{123} は $(1,2,3)$ の入れ替えに対して完全対称 (10 成分) であり、$Q_{122}=0$。この拘束条件 (3 個) により $10-3=7$ 成分となる。$(1,2)$ の入れ替えについて対称であれば $G^{(1)}=Q_1^{(3)}=G_{12}^{(2)}=0$。反対称なら $Q_1^{(1)}=Q_1^{(2)}=G_{12}^{(1)}=Q_{123}^{(1)}=0$。$P_{123}$ を表すための独立なパラメータ数は $G^{(1)}$, $Q_1^{(1,2,3)}$, $G_{12}^{(1,2)}$, $Q_{123}^{(1)}$ の $1+3\cdot3+2\cdot5+7=27$ 個で、全成分数と一致している。拘束条件を具体的に書くと $Q_{xxx}^{(1)}+Q_{xyy}^{(1)}+Q_{xzz}^{(1)}=0$, $Q_{xxy}^{(1)}+Q_{yyy}^{(1)}+Q_{yzz}^{(1)}=0$, $Q_{xxz}^{(1)}+Q_{yyz}^{(1)}+Q_{zzz}^{(1)}=0$。

Voigt 表記 $(1=xx,\ 2=yy,\ 3=zz,\ 4=yz,\ 5=zx,\ 6=xy)$ を用いて、行列形式 $(1,2,3,4,5,6)\times(x,y,z)$ および $(4,5,6)\times(x,y,z)$ で書くと、対称成分と反対称成分は

$$\hat{P}^s=\begin{pmatrix} S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \\ S_{4x} & S_{4y} & S_{4z} \\ S_{5x} & S_{5y} & S_{5z} \\ S_{6x} & S_{6y} & S_{6z} \end{pmatrix},\quad \hat{P}^a=\begin{pmatrix} A_{4x} & A_{4y} & A_{4z} \\ A_{5x} & A_{5y} & A_{5z} \\ A_{6x} & A_{6y} & A_{6z} \end{pmatrix} \tag{12}$$

2.5. 4 階

4 階テンソル $P_{12;34}$ は $3^4=81$ 成分ある。$(1,2)$, $(3,4)$, $((1,2),(3,4))$ の入れ替えについて、対称・対称・対称な成分 $P^{sss}_{12;34}$ は 21、対称・対称・反対称な成分 $P^{ssa}_{12;34}$ は 15、反対称・反対称・対称な成分 $P^{aas}_{12;34}$ は 6、反対称・反対称・反対称な成分 $P^{aaa}_{12;34}$ は 3、対称・反対称な成分 $P^{sa}_{12;34}$ は 18、反対称・対称な成分 $P^{as}_{12;34}$ は 18 である。それぞれ

$$
\begin{aligned}
P_{1234} &= P^{sss}_{12;34}+P^{ssa}_{12;34}+P^{aas}_{12;34}+P^{aaa}_{12;34}+P^{sa}_{12;34}+P^{as}_{12;34}\\
P^{sss}_{12;34} &= \delta_{12}\delta_{34}Q^{(1)}+\delta_{12;34}Q^{(2)}+\delta_{12;34;56}Q^{(1)}_{56}+\delta'_{12;34;56}Q^{(2)}_{56}+Q^{(1)}_{1234}\\
P^{ssa}_{12;34} &= \delta^5_{12;34}G^{(1)}_5+\delta''_{12;34;56}Q^{(3)}_{56}+\delta^7_{12;34;56}G^{(1)}_{567}\\
P^{aas}_{12;34} &= \epsilon^{12;34}Q^{(3)}+\epsilon^{12;34}_{56}Q^{(4)}_{56}\\
P^{aaa}_{12;34} &= \epsilon^{12;34}_5G^{(2)}_5\\
P^{sa}_{12;34} &= \delta_{12}\epsilon^{345}G^{(3)}_5+\gamma^{34}_{12;5}G^{(4)}_5+\gamma^{34}_{12;56}Q^{(5)}_{56}+\epsilon^{345}G^{(2)}_{125}\\
P^{as}_{12;34} &= \delta_{34}\epsilon^{125}G^{(5)}_5+\gamma^{12}_{34;5}G^{(6)}_5+\gamma^{12}_{34;56}Q^{(6)}_{56}+\epsilon^{125}G^{(3)}_{345}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

である。ここで、Q_{1234} は $(1,2,3,4)$ の入れ替えに対して完全対称 (15 成分) であり、$Q_{1233}=0$。この拘束条件 (6 個) により $15-6=9$ 成分となる。P_{1234} を表すための独立なパラメータ数は $Q^{(1,2,3)}$, $G^{(1,2,3,4,5,6)}_1$, $Q^{(1,2,3,4,5,6)}_{12}$, $G^{(1,2,3)}_{123}$, $Q^{(1)}_{1234}$ の $3\cdot1+6\cdot3+6\cdot5+3\cdot7+9=81$ 個で、全成分数と一致している。拘束条件を具体的に書くと $Q^{(1)}_{xxxx}+Q^{(1)}_{xxyy}+Q^{(1)}_{xxzz}=0$, $Q^{(1)}_{xxyy}+Q^{(1)}_{yyyy}+Q^{(1)}_{yyzz}=0$, $Q^{(1)}_{xxzz}+Q^{(1)}_{yyzz}+Q^{(1)}_{zzzz}=0$, $Q^{(1)}_{xxyz}+Q^{(1)}_{yyyz}+Q^{(1)}_{yzzz}=0$, $Q^{(1)}_{xxxz}+Q^{(1)}_{xyyz}+Q^{(1)}_{xzzz}=0$, $Q^{(1)}_{xxxy}+Q^{(1)}_{xyyy}+Q^{(1)}_{xyzz}=0$。

P_{1234} のうち、$P_{12;3;4}=P_{21;3;4}$ を満たすものを $P^s_{12;3;4}$, $P_{12;3;4}=-P_{21;3;4}$ を満たすものを $P^a_{12;3;4}$ と表すと

$$
\begin{aligned}
P^s_{12;3;4} &= P^{sss}_{12;34}+P^{ssa}_{12;34}+P^{sa}_{12;34}\\
P^a_{12;3;4} &= P^{aas}_{12;34}+P^{aaa}_{12;34}+P^{as}_{12;34}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

である。

また、P_{1234} のうち $(1,2,3)$ の入れ替えに関して完全対称なものを $P^t_{123;4}$ と表すと

$$
\begin{aligned}
P^t_{123;4} &= (\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{12;34})Q^{(1)}+\delta_{12;34;56}Q^{(1)}_{56}+\delta'_{12;34;56}Q^{(2)}_{56}+\delta''_{12;34;56}Q^{(3)}_{56}+\gamma^{34}_{12;56}Q^{(5)}_{56}+Q^{(1)}_{1234}\\
&= (\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23})Q^{(1)}+\delta_{12;34;56}Q^{(1)}_{56}+\delta'_{12;34;56}Q^{(2)}_{56}+\delta''_{12;34;56}Q^{(3)}_{56}+\gamma^{34}_{12;56}Q^{(5)}_{56}\\
&\quad+Q^{(1)}_{1234}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

である。$(1,2,3)$ に関して完全対称なものは sss, ssa, sa に含まれる計 54 個のパラメータで表されるが、反対称成分が消える条件から $Q^{(2)}=Q^{(1)}$, $G^{(1)}_1=G^{(3)}_1=G^{(4)}_1=0$, $G^{(1)}_{123}=G^{(2)}_{123}=0$ が成り立つので、独立なものはそのうちの 30 個である。

行列形式 $(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)$ で書くと、sss 成分と ssa 成分は

$$\hat{P}^{sss}=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ * & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ * & * & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ * & * & * & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ * & * & * & * & S_{55} & S_{56} \\ * & * & * & * & * & S_{66} \end{pmatrix},\quad \hat{P}^{ssa}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} & \bar{S}_{15} & \bar{S}_{16} \\ ** & 0 & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} & \bar{S}_{25} & \bar{S}_{26} \\ ** & ** & 0 & \bar{S}_{34} & \bar{S}_{35} & \bar{S}_{36} \\ ** & ** & ** & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{46} \\ ** & ** & ** & ** & 0 & \bar{S}_{56} \\ ** & ** & ** & ** & ** & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

aas 成分と aaa 成分は、行列形式 $(4,5,6)\times(4,5,6)$ で書くと

$$\hat{P}^{aas}=\begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ * & A_{55} & A_{56} \\ * & * & A_{66} \end{pmatrix},\quad \hat{P}^{aaa}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{A}_{45} & \bar{A}_{46} \\ ** & 0 & \bar{A}_{56} \\ ** & ** & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

行列形式 $(1,2,3,4,5,6)\times(4,5,6)$ または $(4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)$ で書くと、sa 成分と as 成分は

$$\hat{P}^{sa}=\begin{pmatrix} M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix},\quad \hat{P}^{as}=\begin{pmatrix} \bar{M}_{41} & \bar{M}_{42} & \bar{M}_{43} & \bar{M}_{44} & \bar{M}_{45} & \bar{M}_{46} \\ \bar{M}_{51} & \bar{M}_{52} & \bar{M}_{53} & \bar{M}_{54} & \bar{M}_{55} & \bar{M}_{56} \\ \bar{M}_{61} & \bar{M}_{62} & \bar{M}_{63} & \bar{M}_{64} & \bar{M}_{65} & \bar{M}_{66} \end{pmatrix} \tag{18}$$

同様に s,a は、行列形式 $(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ $[7=zy,8=xz,9=yx]$ で書くと

$$P^{s}_{12;3;4}=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} & U_{26} & U_{27} & U_{28} & U_{29} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} & U_{36} & U_{37} & U_{38} & U_{39} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} & U_{46} & U_{47} & U_{48} & U_{49} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} & U_{56} & U_{57} & U_{58} & U_{59} \\ U_{61} & U_{62} & U_{63} & U_{64} & U_{65} & U_{66} & U_{67} & U_{68} & U_{69} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$P^{a}_{12;3;4}=\begin{pmatrix} V_{41} & V_{42} & V_{43} & V_{44} & V_{45} & V_{46} & V_{47} & V_{48} & V_{49} \\ V_{51} & V_{52} & V_{53} & V_{54} & V_{55} & V_{56} & V_{57} & V_{58} & V_{59} \\ V_{61} & V_{62} & V_{63} & V_{64} & V_{65} & V_{66} & V_{67} & V_{68} & V_{69} \end{pmatrix} \tag{20}$$

また t は、行列形式 $(\mathbf{1}=(xxx),\mathbf{2}=(yyy),\mathbf{3}=(zzz),\mathbf{4}=(yyz),\mathbf{5}=(zzx),\mathbf{6}=(xxy),\mathbf{7}=(yzz),\mathbf{8}=$

$(zxx), \mathbf{9} = (xyy), \mathbf{10} = (xyz)) \times (x, y, z)$ で書くと

$$P^t_{123;4} = \begin{pmatrix} W_{\mathbf{1}x} & W_{\mathbf{1}y} & W_{\mathbf{1}z} \\ W_{\mathbf{2}x} & W_{\mathbf{2}y} & W_{\mathbf{2}z} \\ W_{\mathbf{3}x} & W_{\mathbf{3}y} & W_{\mathbf{3}z} \\ W_{\mathbf{4}x} & W_{\mathbf{4}y} & W_{\mathbf{4}z} \\ W_{\mathbf{5}x} & W_{\mathbf{5}y} & W_{\mathbf{5}z} \\ W_{\mathbf{6}x} & W_{\mathbf{6}y} & W_{\mathbf{6}z} \\ W_{\mathbf{7}x} & W_{\mathbf{7}y} & W_{\mathbf{7}z} \\ W_{\mathbf{8}x} & W_{\mathbf{8}y} & W_{\mathbf{8}z} \\ W_{\mathbf{9}x} & W_{\mathbf{9}y} & W_{\mathbf{9}z} \\ W_{\mathbf{10}x} & W_{\mathbf{10}y} & W_{\mathbf{10}z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

以上の分解に現れる独立な多極子の自由度数を表 2 にまとめておく。

3. 各成分の多極子表示

テンソルの成分は Cartesian 座標系で表されている。各 (磁気) 点群は、活性化した多極子の成分で特徴づけられるので、テンソル成分を極座標表示の多極子と関係づけておくと、有限なテンソル成分や成分間の関係が見通し良くなる。

テンソル成分の多極子表示においては、1 次元の恒等表現に落ちる多極子成分を用いるので、より高対称な点群での E, T 表現の成分間の相対符号や係数は重要でない。そこで、以下の関係式 (22), (23) のように係数がシンプルになるように多極子の定義における全体の係数を調整した (表 3)。また、$r^2 \to 0$, $(x, y, z)r^2 \to 0$, $(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)r^2 \to 0$ の関係が成り立つことに注意する。

3.1. 立方晶系

Cartesian 座標系と多極子の関係

$$\begin{aligned}
&x = \mathtt{px}, \quad y = \mathtt{py}, \quad z = \mathtt{pz} \\
&xx = -\mathtt{du} + \mathtt{dv}, \quad yy = -\mathtt{du} - \mathtt{dv}, \quad zz = 2\mathtt{du} \\
&yz = \mathtt{dyz}, \quad xz = \mathtt{dxz}, \quad xy = \mathtt{dxy} \\
&xxx = 2\mathtt{fax}, \quad yyy = 2\mathtt{fay}, \quad zzz = 2\mathtt{faz} \\
&xzz = -\mathtt{fax} - \mathtt{fbx}, \quad xxy = -\mathtt{fay} - \mathtt{fby}, \quad yyz = -\mathtt{faz} - \mathtt{fbz} \\
&xyy = -\mathtt{fax} + \mathtt{fbx}, \quad yzz = -\mathtt{fay} + \mathtt{fby}, \quad xxz = -\mathtt{faz} + \mathtt{fbz} \\
&xyz = \mathtt{f3}
\end{aligned}$$

表 2　極性 i テンソルにおける独立な自由度数。c テンソルなら $(Q, G) \to (T, M)$ に置き換える。軸性テンソルなら $Q \leftrightarrow G$, $T \leftrightarrow M$ に置き換える。

ランク	タイプ	多極子	個数	対称性
0	-	$Q^{(1)}$	1	-
1	-	$Q_1^{(1)}$	3	-
2	s	$Q^{(1)}$, $Q_{12}^{(1)}$	6	$P_{12}^{s} = P_{21}^{s}$
	a	$G_1^{(1)}$	3	$P_{12}^{a} = -P_{21}^{a}$
3	s	$Q_1^{(1)}$, $Q_1^{(2)}$, $G_{12}^{(1)}$, $Q_{123}^{(1)}$	18	$P_{12;3}^{s} = P_{21;3}^{s}$
	a	$G^{(1)}$, $Q_1^{(3)}$, $G_{12}^{(2)}$	9	$P_{12;3}^{a} = -P_{21;3}^{a}$
4	sss	$Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q_{12}^{(1)}$, $Q_{12}^{(2)}$, $Q_{1234}^{(1)}$	21	$P_{12;34}^{sss} = P_{21;34}^{sss} = P_{12;43}^{sss} = P_{34;12}^{sss}$
	ssa	$G_1^{(1)}$, $Q_{12}^{(3)}$, $G_{123}^{(1)}$	15	$P_{12;34}^{ssa} = P_{21;34}^{ssa} = P_{12;43}^{ssa} = -P_{34;12}^{ssa}$
	aas	$Q^{(3)}$, $Q_{12}^{(4)}$	6	$P_{12;34}^{aas} = -P_{21;34}^{aas} = -P_{12;43}^{aas} = P_{34;12}^{aas}$
	aaa	$G_1^{(2)}$	3	$P_{12;34}^{aaa} = -P_{21;34}^{aaa} = -P_{12;43}^{aaa} = -P_{34;12}^{aaa}$
	sa	$G_1^{(3)}$, $G_1^{(4)}$, $Q_{12}^{(5)}$, $G_{123}^{(2)}$	18	$P_{12;34}^{sa} = P_{21;34}^{sa} = -P_{12;43}^{sa}$
	as	$G_1^{(5)}$, $G_1^{(6)}$, $Q_{12}^{(6)}$, $G_{123}^{(3)}$	18	$P_{12;34}^{as} = -P_{21;34}^{as} = P_{12;43}^{as}$
	s	$Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q_{12}^{(1)}$, $Q_{12}^{(2)}$, $Q_{1234}^{(1)}$,	54	$P_{12;3;4}^{s} = P_{21;3;4}^{s}$
		$G_1^{(1)}$, $Q_{12}^{(3)}$, $G_{123}^{(1)}$		
		$G_1^{(3)}$, $G_1^{(4)}$, $Q_{12}^{(5)}$, $G_{123}^{(2)}$		
	a	$Q^{(3)}$, $Q_{12}^{(4)}$, $G_1^{(2)}$,	27	$P_{12;3;4}^{a} = -P_{21;3;4}^{a}$
		$G_1^{(5)}$, $G_1^{(6)}$, $Q_{12}^{(6)}$, $G_{123}^{(3)}$		
	t	$Q^{(1)}$, $Q_{12}^{(1)}$, $Q_{12}^{(2)}$, $Q_{12}^{(3)}$, $Q_{12}^{(5)}$,	30	$P_{123;4}^{t} = P_{132;4}^{t} = P_{213;4}^{t}$
		$Q_{1234}^{(1)}$		$= P_{231;4}^{t} = P_{312;4}^{t} = P_{321;4}^{t}$

$$
\begin{aligned}
&xxxx = 2\mathtt{g} - \mathtt{gu} + \mathtt{gv}, \quad yyyy = 2\mathtt{g} - \mathtt{gu} - \mathtt{gv}, \quad zzzz = 2\mathtt{g} + 2\mathtt{gu} \\
&yyzz = -\mathtt{g} - \mathtt{gu} + \mathtt{gv}, \quad xxzz = -\mathtt{g} - \mathtt{gu} - \mathtt{gv}, \quad xxyy = -\mathtt{g} + 2\mathtt{gu} \\
&xxyz = 2\mathtt{gbx}, \quad xyyz = 2\mathtt{gby}, \quad xyzz = 2\mathtt{gbz} \\
&yyyz = \mathtt{gax} - \mathtt{gbx}, \quad xzzz = \mathtt{gay} - \mathtt{gby}, \quad xxxy = \mathtt{gaz} - \mathtt{gbz} \\
&yzzz = -\mathtt{gax} - \mathtt{gbx}, \quad xxxz = -\mathtt{gay} - \mathtt{gby}, \quad xyyy = -\mathtt{gaz} - \mathtt{gbz}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

3.2. 六方晶系

Cartesian 座標系と多極子の関係

$$\begin{aligned}
&xxx = -3\mathtt{f3x} + \mathtt{f2}, \quad xxy = -\mathtt{f3y} + \mathtt{f1}, \quad xyy = -\mathtt{f3x} - \mathtt{f2}, \quad yyy = -3\mathtt{f3y} - \mathtt{f1} \\
&xzz = 4\mathtt{f3x}, \quad yzz = 4\mathtt{f3y} \\
&xxxx = 3\mathtt{g0} + \mathtt{gc} + \mathtt{gv}, \quad yyyy = 3\mathtt{g0} + \mathtt{gc} - \mathtt{gv}, \\
&xxzz = -4\mathtt{g0} - \mathtt{gv}, \quad yyzz = -4\mathtt{g0} + \mathtt{gv}, \quad xxyy = \mathtt{g0} - \mathtt{gc} \\
&xxyz = -\mathtt{gau} + \mathtt{gb}, \quad yyyz = -3\mathtt{gau} - \mathtt{gb} \\
&xxxz = \mathtt{ga} - 3\mathtt{gav} \quad xyyz = -\mathtt{ga} - \mathtt{gav} \\
&zzzz = 8\mathtt{g0} \quad xzzz = 4\mathtt{gav} \quad yzzz = 4\mathtt{gau}
\end{aligned} \tag{23}$$

以下の成分は立方晶系と共通である。

$$x, \quad y, \quad z, \quad xx, \quad yy, \quad zz, \quad yz, \quad xz, \quad xy, \quad xxz, \quad yyz, \quad xyz, \quad zzz, \quad xxxy, \quad xyyy, \quad xyzz \tag{24}$$

また、六方晶系のすべての磁気点群で 2 次元表現に属する

$$(\mathtt{px}, \mathtt{py}), (\mathtt{dv}, \mathtt{dxy}), (\mathtt{dyz}, \mathtt{dxz}), (\mathtt{f3}, \mathtt{fbz}), (\mathtt{f3x}, \mathtt{f3y}), (\mathtt{gau}, \mathtt{gav}), (\mathtt{gc}, \mathtt{gaz}), (\mathtt{gv}, \mathtt{gbz}) \tag{25}$$

は常に不活性であり、考慮しなくてよい。

表 3　立方晶系 (C) と六方晶系 (H) の多極子の定義。略称は [1,2] の表記に従った。記号は、MultiPie に登録されている基底調和関数を表し、係数 × 記号が略称の定義に等しい。*は不活性。$Q_{4v}^{\beta1}=Q_{4z}^{\alpha}$, $Q_{4u}^{\beta2}=Q_{4v}$, $Q_{4v}^{\beta2}=Q_{4z}^{\beta}$。

l	略称 (C)	係数	記号	定義	略称 (H)	係数	記号	定義
0	Q	1	`s`	1	同左			
1	Q_x	1	`px`	x	同左*			
	Q_y	1	`py`	y	同左*			
	Q_z	1	`pz`	z	同左			
2	Q_u	$\frac{1}{3}$	`du`	$\to \frac{z^2}{2}, -\frac{x^2+y^2}{2}$	同左			
	Q_v	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	`dv`	$\frac{x^2-y^2}{2}$	同左*			
	Q_{yz}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	`dyz`	yz	同左*			
	Q_{xz}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	`dxz`	zx	同左*			
	Q_{xy}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	`dxy`	xy	同左*			
3	Q_{xyz}	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	`f3`	xyz	同左*			
	Q_x^α	$\frac{1}{5}$	`fax`	$\to \frac{x^3}{2}, -\frac{x(y^2+z^2)}{2}$	Q_{3a}	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	`f2`	$\frac{x(x^2-3y^2)}{4}$
	Q_y^α	$\frac{1}{5}$	`fay`	$\to \frac{y^3}{2}, -\frac{y(z^2+x^2)}{2}$	Q_{3b}	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	`f1`	$\frac{y(3x^2-y^2)}{4}$
	Q_z^α	$\frac{1}{5}$	`faz`	$\to \frac{z^3}{2}, -\frac{z(x^2+y^2)}{2}$	同左			
	Q_x^β	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	`fbx`	$\frac{x(y^2-z^2)}{2}$	Q_{3u}*	$\frac{1}{5\sqrt{6}}$	`f3x`	$\to \frac{xz^2}{4}, -\frac{x(x^2+y^2)}{4}$
	Q_y^β	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	`fby`	$\frac{y(z^2-x^2)}{2}$	Q_{3v}*	$\frac{1}{5\sqrt{6}}$	`f3y`	$\to \frac{yz^2}{4}, -\frac{y(x^2+y^2)}{4}$
	Q_z^β	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	`fbz`	$\frac{z(x^2-y^2)}{2}$	同左*			
4	Q_4	$\frac{2}{5\sqrt{21}}$	`g`	$\to \frac{x^4+y^4+z^4}{6}, -\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{3}$	Q_{40}	$\frac{1}{35}$	`g0`	$\to \frac{z^4}{8}, -\frac{(x^2+y^2)z^2}{8}$
	Q_{4u}	$\frac{2}{7\sqrt{15}}$	`gu`	$\to \frac{2z^4-x^4-y^4}{6}, \frac{2x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2}{6}$	Q_{4a}	$\frac{1}{\sqrt{70}}$	`gb`	$\frac{yz(3x^2-y^2)}{4}$
	Q_{4v}	$-\frac{2}{7\sqrt{5}}$	`gv`	$\to \frac{x^4-y^4}{2}, -\frac{(x^2-y^2)z^2}{2}$	$Q_{4u}^{\beta2}$*	同左		
	Q_{4x}^α	$\frac{1}{\sqrt{35}}$	`gax`	$\frac{yz(y^2-z^2)}{2}$	Q_{4u}^{α}*	$-\frac{1}{7\sqrt{10}}$	`gav`	$\to \frac{xz^3}{4}, -\frac{xz(x^2+y^2)}{4}$
	Q_{4y}^α	$\frac{1}{\sqrt{35}}$	`gay`	$\frac{zx(z^2-x^2)}{2}$	Q_{4v}^{α}*	$\frac{1}{7\sqrt{10}}$	`gau`	$\to \frac{yz^3}{4}, -\frac{yz(x^2+y^2)}{4}$
	Q_{4z}^α	$\frac{1}{\sqrt{35}}$	`gaz`	$\frac{xy(x^2-y^2)}{2}$	$Q_{4v}^{\beta1}$*	同左		
	Q_{4x}^β	$\frac{1}{7\sqrt{5}}$	`gbx`	$\to \frac{yzx^2}{2}, -\frac{yz(y^2+z^2)}{2}$	$Q_{4u}^{\beta1}$*	$\frac{1}{\sqrt{35}}$	`gc`	$\frac{4(x^4+y^4)-3z^4}{8}, -\frac{(x^2+y^2)z^2+8x^2y^2}{8}$
	Q_{4y}^β	$\frac{1}{7\sqrt{5}}$	`gby`	$\to \frac{zxy^2}{2}, -\frac{zx(z^2+x^2)}{2}$	Q_{4b}	$\frac{1}{\sqrt{70}}$	`ga`	$\frac{xz(x^2-3y^2)}{4}$
	Q_{4z}^β	$\frac{1}{7\sqrt{5}}$	`gbz`	$\to \frac{xyz^2}{2}, -\frac{xy(x^2+y^2)}{2}$	$Q_{4v}^{\beta2}$*	同左		

A.　テンソル成分

A.1.　2 階テンソル

$$
S_{xx} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xx}, \quad S_{yy} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yy}, \quad S_{zz} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{zz}
$$

$$
S_{xy} = Q^{(1)}_{xy}, \quad S_{xz} = Q^{(1)}_{xz}, \quad S_{yz} = Q^{(1)}_{yz} \tag{26}
$$

$$
A_{yz} = G^{(1)}_x, \quad A_{zx} = G^{(1)}_y, \quad A_{xy} = G^{(1)}_z \tag{27}
$$

A.2.　3 階テンソル

$$
S_{1x} = Q^{(1)}_{xxx} + Q^{(1)}_x + 2Q^{(2)}_x, \quad S_{1y} = 2G^{(1)}_{xz} + Q^{(1)}_{xxy} + Q^{(1)}_y, \quad S_{1z} = -2G^{(1)}_{xy} + Q^{(1)}_{xxz} + Q^{(1)}_z
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{2x} = -2G^{(1)}_{yz} + Q^{(1)}_{xyy} + Q^{(1)}_{x}, \quad S_{2y} = Q^{(1)}_{yyy} + Q^{(1)}_{y} + 2Q^{(2)}_{y}, \quad S_{2z} = 2G^{(1)}_{xy} + Q^{(1)}_{yyz} + Q^{(1)}_{z} \\
&S_{3x} = 2G^{(1)}_{yz} + Q^{(1)}_{xzz} + Q^{(1)}_{x}, \quad S_{3y} = -2G^{(1)}_{xz} + Q^{(1)}_{yzz} + Q^{(1)}_{y}, \quad S_{3z} = Q^{(1)}_{zzz} + Q^{(1)}_{z} + 2Q^{(2)}_{z} \\
&S_{4x} = G^{(1)}_{yy} - G^{(1)}_{zz} + Q^{(1)}_{xyz}, \quad S_{4y} = -G^{(1)}_{xy} + Q^{(1)}_{yyz} + Q^{(2)}_{z}, \quad S_{4z} = G^{(1)}_{xz} + Q^{(1)}_{yzz} + Q^{(2)}_{y} \\
&S_{5x} = G^{(1)}_{xy} + Q^{(1)}_{xxz} + Q^{(2)}_{z}, \quad S_{5y} = -G^{(1)}_{xx} + G^{(1)}_{zz} + Q^{(1)}_{xyz}, \quad S_{5z} = -G^{(1)}_{yz} + Q^{(1)}_{xzz} + Q^{(2)}_{x} \\
&S_{6x} = -G^{(1)}_{xz} + Q^{(1)}_{xxy} + Q^{(2)}_{y}, \quad S_{6y} = G^{(1)}_{yz} + Q^{(1)}_{xyy} + Q^{(2)}_{x}, \quad S_{6z} = G^{(1)}_{xx} - G^{(1)}_{yy} + Q^{(1)}_{xyz} \qquad (28) \\
&A_{4x} = G^{(1)} + G^{(2)}_{xx}, \quad A_{4y} = G^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{z}, \quad A_{4z} = G^{(2)}_{xz} - Q^{(3)}_{y} \\
&A_{5x} = G^{(2)}_{xy} - Q^{(3)}_{z}, \quad A_{5y} = G^{(1)} + G^{(2)}_{yy}, \quad A_{5z} = G^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{x} \\
&A_{6x} = G^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{y}, \quad A_{6y} = G^{(2)}_{yz} - Q^{(3)}_{x}, \quad A_{6z} = G^{(1)} + G^{(2)}_{zz} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

A.3. 4 階テンソル

$$
\begin{aligned}
&S_{11} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxxx} + 2Q^{(1)}_{xx} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{xx}, \quad S_{12} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{yy} \\
&S_{13} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{zz}, \quad S_{14} = Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(1)}_{yz} \\
&S_{15} = Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz}, \quad S_{16} = Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} \\
&S_{22} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyyy} + 2Q^{(1)}_{yy} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{yy}, \quad S_{23} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(1)}_{yy} + Q^{(1)}_{zz} \\
&S_{24} = Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz}, \quad S_{25} = Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(1)}_{xz}, \quad S_{26} = Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} \\
&S_{33} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{zzzz} + 2Q^{(1)}_{zz} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{zz}, \quad S_{34} = Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} \\
&S_{35} = Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz}, \quad S_{36} = Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} \\
&S_{44} = Q^{(1)}_{eyes} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{yy} + Q^{(2)}_{zz}, \quad S_{45} = Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy}, \quad S_{46} = Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} \\
&S_{55} = Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{zz}, \quad S_{56} = Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} \\
&S_{66} = Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{yy} \qquad (30) \\
&\bar{S}_{12} = 4G^{(1)}_{xyz} - Q^{(3)}_{xx} + Q^{(3)}_{yy}, \quad \bar{S}_{13} = -4G^{(1)}_{xyz} - Q^{(3)}_{xx} + Q^{(3)}_{zz}, \quad \bar{S}_{14} = -2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{xzz} + Q^{(3)}_{yz} \\
&\bar{S}_{15} = -2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{y} + Q^{(3)}_{xz}, \quad \bar{S}_{16} = 2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{z} + Q^{(3)}_{xy} \\
&\bar{S}_{23} = 4G^{(1)}_{xyz} - Q^{(3)}_{yy} + Q^{(3)}_{zz}, \quad \bar{S}_{24} = 2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{x} + Q^{(3)}_{yz} \\
&\bar{S}_{25} = 2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{yzz} + Q^{(3)}_{xz}, \quad \bar{S}_{26} = -2G^{(1)}_{yyz} - 2G^{(1)}_{z} + Q^{(3)}_{xy} \\
&\bar{S}_{34} = -2G^{(1)}_{xzz} - 2G^{(1)}_{x} + Q^{(3)}_{yz}, \quad \bar{S}_{35} = 2G^{(1)}_{yzz} + 2G^{(1)}_{y} + Q^{(3)}_{xz}, \quad \bar{S}_{36} = -2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{yyz} + Q^{(3)}_{xy} \\
&\bar{S}_{45} = G^{(1)}_{xxz} + G^{(1)}_{yyz} - G^{(1)}_{zzz} - G^{(1)}_{z}, \quad \bar{S}_{46} = -G^{(1)}_{xxy} + G^{(1)}_{yyy} - G^{(1)}_{yzz} + G^{(1)}_{y} \\
&\bar{S}_{56} = -G^{(1)}_{xxx} + G^{(1)}_{xyy} + G^{(1)}_{xzz} - G^{(1)}_{x} \qquad (31) \\
&A_{44} = Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{xx}, \quad A_{45} = 2Q^{(4)}_{xy}, \quad A_{46} = 2Q^{(4)}_{xz} \\
&A_{55} = Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{yy}, \quad A_{56} = 2Q^{(4)}_{yz} \\
&A_{66} = Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{zz} \qquad (32) \\
&\bar{A}_{45} = -G^{(2)}_{z}, \quad \bar{A}_{46} = G^{(2)}_{y}, \quad \bar{A}_{56} = -G^{(2)}_{x} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$M_{14} = G^{(2)}_{xxx} + G^{(3)}_{x} + 2G^{(4)}_{x}, \quad M_{15} = G^{(2)}_{xxy} + G^{(3)}_{y} + 2Q^{(5)}_{xz}, \quad M_{16} = G^{(2)}_{xxz} + G^{(3)}_{z} - 2Q^{(5)}_{xy}$$
$$M_{24} = G^{(2)}_{xyy} + G^{(3)}_{x} - 2Q^{(5)}_{yz}, \quad M_{25} = G^{(2)}_{yyy} + G^{(3)}_{y} + 2G^{(4)}_{y}, \quad M_{26} = G^{(2)}_{yyz} + G^{(3)}_{z} + 2Q^{(5)}_{xy}$$
$$M_{34} = G^{(2)}_{xzz} + G^{(3)}_{x} + 2Q^{(5)}_{yz}, \quad M_{35} = G^{(2)}_{yzz} + G^{(3)}_{y} - 2Q^{(5)}_{xz}, \quad M_{36} = G^{(2)}_{zzz} + G^{(3)}_{z} + 2G^{(4)}_{z}$$
$$M_{44} = G^{(2)}_{xyz} + Q^{(5)}_{yy} - Q^{(5)}_{zz}, \quad M_{45} = G^{(2)}_{yyz} + G^{(4)}_{z} - Q^{(5)}_{xy}, \quad M_{46} = G^{(2)}_{yzz} + G^{(4)}_{y} + Q^{(5)}_{xz}$$
$$M_{54} = G^{(2)}_{xxz} + G^{(4)}_{z} + Q^{(5)}_{xy}, \quad M_{55} = G^{(2)}_{xyz} - Q^{(5)}_{xx} + Q^{(5)}_{zz}, \quad M_{56} = G^{(2)}_{xzz} + G^{(4)}_{x} - Q^{(5)}_{yz}$$
$$M_{64} = G^{(2)}_{xxy} + G^{(4)}_{y} - Q^{(5)}_{xz}, \quad M_{65} = G^{(2)}_{xyy} + G^{(4)}_{x} + Q^{(5)}_{yz}, \quad M_{66} = G^{(2)}_{xyz} + Q^{(5)}_{xx} - Q^{(5)}_{yy} \tag{34}$$

$$\bar{M}_{41} = G^{(3)}_{xxx} + G^{(5)}_{x} + 2G^{(6)}_{x}, \quad \bar{M}_{42} = G^{(3)}_{xyy} + G^{(5)}_{x} - 2Q^{(6)}_{yz}, \quad \bar{M}_{43} = G^{(3)}_{xzz} + G^{(5)}_{x} + 2Q^{(6)}_{yz}$$
$$\bar{M}_{44} = G^{(3)}_{xyz} + Q^{(6)}_{yy} - Q^{(6)}_{zz}, \quad \bar{M}_{45} = G^{(3)}_{xxz} + G^{(6)}_{z} + Q^{(6)}_{xy}, \quad \bar{M}_{46} = G^{(3)}_{xxy} + G^{(6)}_{y} - Q^{(6)}_{xz}$$
$$\bar{M}_{51} = G^{(3)}_{xxy} + G^{(5)}_{y} + 2Q^{(6)}_{xz}, \quad \bar{M}_{52} = G^{(3)}_{yyy} + G^{(5)}_{y} + 2G^{(6)}_{y}, \quad \bar{M}_{53} = G^{(3)}_{yzz} + G^{(5)}_{y} - 2Q^{(6)}_{xz}$$
$$\bar{M}_{54} = G^{(3)}_{yyz} + G^{(6)}_{z} - Q^{(6)}_{xy}, \quad \bar{M}_{55} = G^{(3)}_{xyz} - Q^{(6)}_{xx} + Q^{(6)}_{zz}, \quad \bar{M}_{56} = G^{(3)}_{xyy} + G^{(6)}_{x} + Q^{(6)}_{yz}$$
$$\bar{M}_{61} = G^{(3)}_{xxz} + G^{(5)}_{z} - 2Q^{(6)}_{xy}, \quad \bar{M}_{62} = G^{(3)}_{yyz} + G^{(5)}_{z} + 2Q^{(6)}_{xy}, \quad \bar{M}_{63} = G^{(3)}_{zzz} + G^{(5)}_{z} + 2G^{(6)}_{z}$$
$$\bar{M}_{64} = G^{(3)}_{yzz} + G^{(6)}_{y} + Q^{(6)}_{xz}, \quad \bar{M}_{65} = G^{(3)}_{xzz} + G^{(6)}_{x} - Q^{(6)}_{yz}, \quad \bar{M}_{66} = G^{(3)}_{xyz} + Q^{(6)}_{xx} - Q^{(6)}_{yy} \tag{35}$$

$$W_{\mathbf{1}x} = 3Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxxx} + 2Q^{(1)}_{xx} + 4Q^{(2)}_{xx}$$
$$W_{\mathbf{1}y} = Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} - 2Q^{(5)}_{xy}$$
$$W_{\mathbf{1}z} = Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} - 2Q^{(5)}_{xz}$$
$$W_{\mathbf{2}x} = Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} - 2Q^{(5)}_{xy}$$
$$W_{\mathbf{2}y} = 3Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyyy} + 2Q^{(1)}_{yy} + 4Q^{(2)}_{yy}$$
$$W_{\mathbf{2}z} = Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} - 2Q^{(5)}_{yz}$$
$$W_{\mathbf{3}x} = Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} - 2Q^{(5)}_{xz}$$
$$W_{\mathbf{3}y} = Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} - 2Q^{(5)}_{yz}$$
$$W_{\mathbf{3}z} = 3Q^{(1)} + Q^{(1)}_{zzzz} + 2Q^{(1)}_{zz} + 4Q^{(2)}_{zz}$$
$$W_{\mathbf{4}x} = Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(1)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz}$$
$$W_{\mathbf{4}y} = Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} + 2Q^{(5)}_{yz}$$
$$W_{\mathbf{4}z} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(1)}_{yy} + Q^{(1)}_{zz} - Q^{(3)}_{yy} + Q^{(3)}_{zz}$$
$$W_{\mathbf{5}x} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{zz} + Q^{(3)}_{xx} - Q^{(3)}_{zz}$$
$$W_{\mathbf{5}y} = Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy}$$
$$W_{\mathbf{5}z} = Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} + 2Q^{(5)}_{xz}$$
$$W_{\mathbf{6}x} = Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} + 2Q^{(5)}_{xy}$$
$$W_{\mathbf{6}y} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{yy} - Q^{(3)}_{xx} + Q^{(3)}_{yy}$$
$$W_{\mathbf{6}z} = Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(1)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz}$$
$$W_{\mathbf{7}x} = Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy} - Q^{(5)}_{xy}$$

$$
\begin{aligned}
W_{\mathbf{7}y} &= Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(2)}_{yy} + Q^{(2)}_{zz} - Q^{(5)}_{yy} + Q^{(5)}_{zz} \\
W_{\mathbf{7}z} &= Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} - Q^{(3)}_{yz} \\
W_{\mathbf{8}x} &= Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} - Q^{(3)}_{xz} \\
W_{\mathbf{8}y} &= Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} - Q^{(5)}_{yz} \\
W_{\mathbf{8}z} &= Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{zz} + Q^{(5)}_{xx} - Q^{(5)}_{zz} \\
W_{\mathbf{9}x} &= Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{yy} - Q^{(5)}_{xx} + Q^{(5)}_{yy} \\
W_{\mathbf{9}y} &= Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} - Q^{(3)}_{xy} \\
W_{\mathbf{9}z} &= Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} - Q^{(5)}_{xz} \\
W_{\mathbf{10}x} &= Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} + Q^{(5)}_{yz} \\
W_{\mathbf{10}y} &= Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} + Q^{(5)}_{xz} \\
W_{\mathbf{10}z} &= Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} - Q^{(3)}_{xy} \qquad (36) \\
U_{11} &= Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxxx} + 2Q^{(1)}_{xx} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{xx} \\
U_{12} &= 4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{yy} - Q^{(3)}_{xx} + Q^{(3)}_{yy} \\
U_{13} &= -4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{zz} - Q^{(3)}_{xx} + Q^{(3)}_{zz} \\
U_{14} &= -2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{xzz} + G^{(2)}_{xxx} + G^{(3)}_{x} + 2G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(1)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} \\
U_{15} &= -2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{y} + G^{(2)}_{xxy} + G^{(3)}_{y} + Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} + 2Q^{(5)}_{xz} \\
U_{16} &= 2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{z} + G^{(2)}_{xxz} + G^{(3)}_{z} + Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} - 2Q^{(5)}_{xy} \\
U_{17} &= -2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{xzz} - G^{(2)}_{xxx} - G^{(3)}_{x} - 2G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(1)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} \\
U_{18} &= -2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{y} - G^{(2)}_{xxy} - G^{(3)}_{y} + Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} - 2Q^{(5)}_{xz} \\
U_{19} &= 2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{z} - G^{(2)}_{xxz} - G^{(3)}_{z} + Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} + 2Q^{(5)}_{xy} \\
U_{21} &= -4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{yy} + Q^{(3)}_{xx} - Q^{(3)}_{yy} \\
U_{22} &= Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyyy} + 2Q^{(1)}_{yy} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{yy} \\
U_{23} &= 4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(1)}_{yy} + Q^{(1)}_{zz} - Q^{(3)}_{yy} + Q^{(3)}_{zz} \\
U_{24} &= 2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{x} + G^{(2)}_{xyy} + G^{(3)}_{x} + Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} - 2Q^{(5)}_{yz} \\
U_{25} &= 2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{yzz} + G^{(2)}_{yyy} + G^{(3)}_{y} + 2G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(1)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} \\
U_{26} &= -2G^{(1)}_{yyz} - 2G^{(1)}_{z} + G^{(2)}_{yyz} + G^{(3)}_{z} + Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} + 2Q^{(5)}_{xy} \\
U_{27} &= 2G^{(1)}_{xyy} + 2G^{(1)}_{x} - G^{(2)}_{xyy} - G^{(3)}_{x} + Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} + 2Q^{(5)}_{yz} \\
U_{28} &= 2G^{(1)}_{xxy} - 2G^{(1)}_{yzz} - G^{(2)}_{yyy} - G^{(3)}_{y} - 2G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(1)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} \\
U_{29} &= -2G^{(1)}_{yyz} - 2G^{(1)}_{z} - G^{(2)}_{yyz} - G^{(3)}_{z} + Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy} - 2Q^{(5)}_{xy} \\
U_{31} &= 4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(1)}_{xx} + Q^{(1)}_{zz} + Q^{(3)}_{xx} - Q^{(3)}_{zz} \\
U_{32} &= -4G^{(1)}_{xyz} + Q^{(1)} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(1)}_{yy} + Q^{(1)}_{zz} + Q^{(3)}_{yy} - Q^{(3)}_{zz}
\end{aligned}
$$

$$U_{33} = Q^{(1)} + Q^{(1)}_{zzzz} + 2Q^{(1)}_{zz} + 2Q^{(2)} + 4Q^{(2)}_{zz}$$
$$U_{34} = -2G^{(1)}_{xzz} - 2G^{(1)}_{x} + G^{(2)}_{xzz} + G^{(3)}_{x} + Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} + 2Q^{(5)}_{yz}$$
$$U_{35} = 2G^{(1)}_{yzz} + 2G^{(1)}_{y} + G^{(2)}_{yzz} + G^{(3)}_{y} + Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} - 2Q^{(5)}_{xz}$$
$$U_{36} = -2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{yyz} + G^{(2)}_{zzz} + G^{(3)}_{z} + 2G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy}$$
$$U_{37} = -2G^{(1)}_{xzz} - 2G^{(1)}_{x} - G^{(2)}_{xzz} - G^{(3)}_{x} + Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} + Q^{(3)}_{yz} - 2Q^{(5)}_{yz}$$
$$U_{38} = 2G^{(1)}_{yzz} + 2G^{(1)}_{y} - G^{(2)}_{yzz} - G^{(3)}_{y} + Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} + Q^{(3)}_{xz} + 2Q^{(5)}_{xz}$$
$$U_{39} = -2G^{(1)}_{xxz} + 2G^{(1)}_{yyz} - G^{(2)}_{zzz} - G^{(3)}_{z} - 2G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} + Q^{(3)}_{xy}$$
$$U_{41} = 2G^{(1)}_{xyy} - 2G^{(1)}_{xzz} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(1)}_{yz} - Q^{(3)}_{yz}$$
$$U_{42} = -2G^{(1)}_{xyy} - 2G^{(1)}_{x} + Q^{(1)}_{yyyz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} - Q^{(3)}_{yz}$$
$$U_{43} = 2G^{(1)}_{xzz} + 2G^{(1)}_{x} + Q^{(1)}_{yzzz} + Q^{(1)}_{yz} + 2Q^{(2)}_{yz} - Q^{(3)}_{yz}$$
$$U_{44} = G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{yy} + Q^{(2)}_{zz} + Q^{(5)}_{yy} - Q^{(5)}_{zz}$$
$$U_{45} = G^{(1)}_{xxz} + G^{(1)}_{yyz} - G^{(1)}_{zzz} - G^{(1)}_{z} + G^{(2)}_{yyz} + G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy} - Q^{(5)}_{xy}$$
$$U_{46} = -G^{(1)}_{xxy} + G^{(1)}_{yyy} - G^{(1)}_{yzz} + G^{(1)}_{y} + G^{(2)}_{yzz} + G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} + Q^{(5)}_{xz}$$
$$U_{47} = -G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{yyzz} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{yy} + Q^{(2)}_{zz} - Q^{(5)}_{yy} + Q^{(5)}_{zz}$$
$$U_{48} = G^{(1)}_{xxz} + G^{(1)}_{yyz} - G^{(1)}_{zzz} - G^{(1)}_{z} - G^{(2)}_{yyz} - G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy} + Q^{(5)}_{xy}$$
$$U_{49} = -G^{(1)}_{xxy} + G^{(1)}_{yyy} - G^{(1)}_{yzz} + G^{(1)}_{y} - G^{(2)}_{yzz} - G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} - Q^{(5)}_{xz}$$
$$U_{51} = 2G^{(1)}_{xxy} + 2G^{(1)}_{y} + Q^{(1)}_{xxxz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} - Q^{(3)}_{xz}$$
$$U_{52} = -2G^{(1)}_{xxy} + 2G^{(1)}_{yzz} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(1)}_{xz} - Q^{(3)}_{xz}$$
$$U_{53} = -2G^{(1)}_{yzz} - 2G^{(1)}_{y} + Q^{(1)}_{xzzz} + Q^{(1)}_{xz} + 2Q^{(2)}_{xz} - Q^{(3)}_{xz}$$
$$U_{54} = -G^{(1)}_{xxz} - G^{(1)}_{yyz} + G^{(1)}_{zzz} + G^{(1)}_{z} + G^{(2)}_{xxz} + G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy} + Q^{(5)}_{xy}$$
$$U_{55} = G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{zz} - Q^{(5)}_{xx} + Q^{(5)}_{zz}$$
$$U_{56} = -G^{(1)}_{xxx} + G^{(1)}_{xyy} + G^{(1)}_{xzz} - G^{(1)}_{x} + G^{(2)}_{xzz} + G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} - Q^{(5)}_{yz}$$
$$U_{57} = -G^{(1)}_{xxz} - G^{(1)}_{yyz} + G^{(1)}_{zzz} + G^{(1)}_{z} - G^{(2)}_{xxz} - G^{(4)}_{z} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(2)}_{xy} - Q^{(5)}_{xy}$$
$$U_{58} = -G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{xxzz} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{zz} + Q^{(5)}_{xx} - Q^{(5)}_{zz}$$
$$U_{59} = -G^{(1)}_{xxx} + G^{(1)}_{xyy} + G^{(1)}_{xzz} - G^{(1)}_{x} - G^{(2)}_{xzz} - G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} + Q^{(5)}_{yz}$$
$$U_{61} = -2G^{(1)}_{xxz} - 2G^{(1)}_{z} + Q^{(1)}_{xxxy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} - Q^{(3)}_{xy}$$
$$U_{62} = 2G^{(1)}_{yyz} + 2G^{(1)}_{z} + Q^{(1)}_{xyyy} + Q^{(1)}_{xy} + 2Q^{(2)}_{xy} - Q^{(3)}_{xy}$$
$$U_{63} = 2G^{(1)}_{xxz} - 2G^{(1)}_{yyz} + Q^{(1)}_{xyzz} + Q^{(1)}_{xy} - Q^{(3)}_{xy}$$
$$U_{64} = G^{(1)}_{xxy} - G^{(1)}_{yyy} + G^{(1)}_{yzz} - G^{(1)}_{y} + G^{(2)}_{xxy} + G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} - Q^{(5)}_{xz}$$
$$U_{65} = G^{(1)}_{xxx} - G^{(1)}_{xyy} - G^{(1)}_{xzz} + G^{(1)}_{x} + G^{(2)}_{xyy} + G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} + Q^{(5)}_{yz}$$
$$U_{66} = G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{yy} + Q^{(5)}_{xx} - Q^{(5)}_{yy}$$

$$
\begin{aligned}
U_{67} &= G^{(1)}_{xxy} - G^{(1)}_{yyy} + G^{(1)}_{yzz} - G^{(1)}_{y} - G^{(2)}_{xxy} - G^{(4)}_{y} + Q^{(1)}_{xyyz} + Q^{(2)}_{xz} + Q^{(5)}_{xz} \\
U_{68} &= G^{(1)}_{xxx} - G^{(1)}_{xyy} - G^{(1)}_{xzz} + G^{(1)}_{x} - G^{(2)}_{xyy} - G^{(4)}_{x} + Q^{(1)}_{xxyz} + Q^{(2)}_{yz} - Q^{(5)}_{yz} \\
U_{69} &= -G^{(2)}_{xyz} + Q^{(1)}_{xxyy} + Q^{(2)} + Q^{(2)}_{xx} + Q^{(2)}_{yy} - Q^{(5)}_{xx} + Q^{(5)}_{yy}
\end{aligned} \tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{41} &= G^{(3)}_{xxx} + G^{(5)}_{x} + 2G^{(6)}_{x} \\
V_{42} &= G^{(3)}_{xyy} + G^{(5)}_{x} - 2Q^{(6)}_{yz} \\
V_{43} &= G^{(3)}_{xzz} + G^{(5)}_{x} + 2Q^{(6)}_{yz} \\
V_{44} &= G^{(3)}_{xyz} + Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{xx} + Q^{(6)}_{yy} - Q^{(6)}_{zz} \\
V_{45} &= -G^{(2)}_{z} + G^{(3)}_{xxz} + G^{(6)}_{z} + 2Q^{(4)}_{xy} + Q^{(6)}_{xy} \\
V_{46} &= G^{(2)}_{y} + G^{(3)}_{xxy} + G^{(6)}_{y} + 2Q^{(4)}_{xz} - Q^{(6)}_{xz} \\
V_{47} &= G^{(3)}_{xyz} - Q^{(3)} - 2Q^{(4)}_{xx} + Q^{(6)}_{yy} - Q^{(6)}_{zz} \\
V_{48} &= G^{(2)}_{z} + G^{(3)}_{xxz} + G^{(6)}_{z} - 2Q^{(4)}_{xy} + Q^{(6)}_{xy} \\
V_{49} &= -G^{(2)}_{y} + G^{(3)}_{xxy} + G^{(6)}_{y} - 2Q^{(4)}_{xz} - Q^{(6)}_{xz} \\
V_{51} &= G^{(3)}_{xxy} + G^{(5)}_{y} + 2Q^{(6)}_{xz} \\
V_{52} &= G^{(3)}_{yyy} + G^{(5)}_{y} + 2G^{(6)}_{y} \\
V_{53} &= G^{(3)}_{yzz} + G^{(5)}_{y} - 2Q^{(6)}_{xz} \\
V_{54} &= G^{(2)}_{z} + G^{(3)}_{yyz} + G^{(6)}_{z} + 2Q^{(4)}_{xy} - Q^{(6)}_{xy} \\
V_{55} &= G^{(3)}_{xyz} + Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{yy} - Q^{(6)}_{xx} + Q^{(6)}_{zz} \\
V_{56} &= -G^{(2)}_{x} + G^{(3)}_{xyy} + G^{(6)}_{x} + 2Q^{(4)}_{yz} + Q^{(6)}_{yz} \\
V_{57} &= -G^{(2)}_{z} + G^{(3)}_{yyz} + G^{(6)}_{z} - 2Q^{(4)}_{xy} - Q^{(6)}_{xy} \\
V_{58} &= G^{(3)}_{xyz} - Q^{(3)} - 2Q^{(4)}_{yy} - Q^{(6)}_{xx} + Q^{(6)}_{zz} \\
V_{59} &= G^{(2)}_{x} + G^{(3)}_{xyy} + G^{(6)}_{x} - 2Q^{(4)}_{yz} + Q^{(6)}_{yz} \\
V_{61} &= G^{(3)}_{xxz} + G^{(5)}_{z} - 2Q^{(6)}_{xy} \\
V_{62} &= G^{(3)}_{yyz} + G^{(5)}_{z} + 2Q^{(6)}_{xy} \\
V_{63} &= G^{(3)}_{zzz} + G^{(5)}_{z} + 2G^{(6)}_{z} \\
V_{64} &= -G^{(2)}_{y} + G^{(3)}_{yzz} + G^{(6)}_{y} + 2Q^{(4)}_{xz} + Q^{(6)}_{xz} \\
V_{65} &= G^{(2)}_{x} + G^{(3)}_{xzz} + G^{(6)}_{x} + 2Q^{(4)}_{yz} - Q^{(6)}_{yz} \\
V_{66} &= G^{(3)}_{xyz} + Q^{(3)} + 2Q^{(4)}_{zz} + Q^{(6)}_{xx} - Q^{(6)}_{yy} \\
V_{67} &= G^{(2)}_{y} + G^{(3)}_{yzz} + G^{(6)}_{y} - 2Q^{(4)}_{xz} + Q^{(6)}_{xz} \\
V_{68} &= -G^{(2)}_{x} + G^{(3)}_{xzz} + G^{(6)}_{x} - 2Q^{(4)}_{yz} - Q^{(6)}_{yz} \\
V_{69} &= G^{(3)}_{xyz} - Q^{(3)} - 2Q^{(4)}_{zz} + Q^{(6)}_{xx} - Q^{(6)}_{yy}
\end{aligned} \tag{38}
$$

参考文献

[1] S. Hayami, M. Yatsushiro, Y. Yanagi, and H. Kusunose, Phys. Rev. B **98** 165110 (2018). 表 XV, XVI

[2] M. Yatsushiro, *Classification of Multipole in Magnetic Point Group and Exploration of Augmented Odd-Parity Multipole Physics*, Ph.D thesis (Hokkaido University, 2022.3).